奈良県立商科大学「研究季報」第2巻 第3号（1991年12月10日）

ゲーム理論とギバード＝サタースウェイト定理

大谷　和

はじめに

前稿の大谷 [23] では、ゲーム理論とアローの一般不可能性定理との関連性を問題にして、今までの一応の成果をおさめて場合としての Nakamura Theorem に含まれる拒否権者支配制のゲーム的表現とさらに Nakamura Theorem を利用して論者自身で展開を試みた寡頭支配制のゲーム的表現と最後に Wilson [18] よる Arrow 独裁制のゲーム的表現の３つの場合を述べた。前稿の第２部である、この小論では、ゲーム理論との関連性を問題にし、もう１つの成果をおさめて、現在、論議されつつある Strategy-Proof 性をもつ社会的選択関数の存在可能性問題を議論する。この問題は、Gibbard［８], Blin and Sattherthwaite［３］によって、まず問題提起された。Strategy（戦略）というゲーム理論で常用される用語から推察することができるように、ゲーム理論によって、この存在可能性を問う問題を解明しようとする研究は、すぐにはじまっている。Dummet and Farquharson［５］という投票ゲームでの均衡解の安定性を問う論文を利用して、Dutta and Pattanaik［７], Peleg［14］が、同時期に独立した形で、Strategy-Proof（操作不可能性）をより一般化した Consistent 性という概念によって、この存在可能性問題を論議し、さらに、Exactly Strongly Consistent 性という概念にまで展開し、IIIで述べるように、ゲーム的表現による解決を、さらに一般化しようとしたのが Implementation Theory であり、この理論は、Dasgupta, Hammoud and Maskin［６］により、最初に展開され、最近、論文が頻出している分野である。論者自身の知る範囲では Peleg［15］と Sen（gupta）［16］が、III、IVの Survey としてすぐれている。

ゲーム理論の適用により、今までの経済理論をより一般化し、より新しい成果を得ようとするのが現在の経済理論の１つであるが、以下のIII、IVも、この方向の１つであるといえる。

I　記号の説明

以下、小論で使われる記号の説明をおこなう。

N…プレーヤーの全集合

n…プレーヤーの数

A…選択対象の全集合、$x, y \in A$, $|A|$ は選択対象の基数（要素の数）を示す

m…選択対象の数、$m \geqq 3$ を仮定する

R…弱順序(完全性、推移性を満たす)の全集合

P…線型順序（上記の弱順序の性質＋非対称性）の全集合

D^i…個人 i の戦略

R^i…個人 i の選好を示す。($R^i \subset R$ の時と、一般的に個人 i の選好を示す時、の２つがある）

P^i…$P^i \subset P$

iff…必要十分条件を示す

Gauss［ ］…ガウス記号で、［ ］の値を、切り下げた結果、もっとも近い整数値示す

F…成果関数

N－｛i｝…プレーヤーの全集合から個人 i を除いた集合

$F(Q^{N-\{i\}}, T^i)$ …$F(Q^1, Q^2, \cdots Q^{i-1}, T^i, Q^{i+1} \cdots Q^n)$ の形の関数を示す

→…A→Bは「AならばB」を示す

↔…A↔は「AとBとは同値」を示す

Ⅱ　操作不可能な社会的選択関数の存在について

操作不可能な社会的選択関数の存在については、次のアローの一般不可能定理の一展開であるギバード＝サタースウェイト定理がある。

［ギバード＝サタースウェイトの定理］（大谷［20］の系3を利用）

もし、｜A｜≧3ならば、SP（戦略の余地なしの条件）、PO（パレート最適性の条件）、ND（非独裁性の条件）を満足する投票方式（これが社会的選択関数にあたる）V は存在しない。（SP, PO, ND については［20］P. 26, P. 28を参照）

この操作不可能な社会的選択関数は存在しないという定理を、ゲーム論で記述し、一般化をして、新しい展開や内容を持たせるための議論が、Ⅲの exactly and strongly consistent 性という概念の利用や、Ⅳの Implementation Theory となっていくわけである。

Ⅲ　exactly and strongly consistent 性という概念について

ゲーム理論の最初の本格的体系書である［17］のP264で展開された概念と、ナッシュ均衡概念を使って［5］は、投票ゲームでの安定性を論じたが、この［5］での安定性概念を利用して、操作不可能な社会的選択関数の議論をゲーム理論によって表現し、より一般化して、新しい展開を試みたのがⅠで述べたように［7］,［14］である。これらの論文では、まず exactly and strongly consistent 性という新しい概念を定義する。［7］では nicely consistent 性という概念を使っているが、exactly and strongly consisten 性の方が、より一般的な概念であるため、以下では Peleg［14］によって、このⅢでは、議論を展開していく。

［CSCF関数の定義］

制約された社会的選択関数（CSCF）は、n個の変数からなる関数 $f=(D^1, D^2, \cdots D^n; F)$ である。ただし、すべての $i \in N$ に対して、$D^i \subset R(A)$ で、またFは D^n からAへの関数であるとする。

CSCF関数のうち、すべての $i \in N$ に対して $D^i = R(A)$ の時, f はSCF（社会的選択関数）になる。

［勝利提携の定義］

$f=(D^1, D^2, \cdots D^N; F)$ をCSCFとする。1つの提携Cは、次の条件が成立するならば勝利提携という。その条件とは $[R^N \in D^N, X \in A$ かつすべての $i \in C$ と $y \in A-\{x\}$ に対.して $x P^i y] \rightarrow F(R^N)=x$ である。

［条件（W_h）の定義］

もし、あらゆるh人からなる提携が勝利提携ならばCSCF関数fは条件（W_h）を満たすという。

次に、投票での戦略面についての定義をする。

［fと R^N とに関連したゲームの定義］

$f=(D^1, D^2, \cdots D^n; F)$ をCSCFとし、また $R^n \in D^N$ とする。fと R^N とに関連したゲームは、正規形のn人ゲーム $G(D^1, D^2, \cdots D^n; F; R^N)$ と記述できる。ただし、ここでDはプレーヤー $i \in N$ の戦略集合、Fは成果関数、R^i は成果空間A上の、プレーヤー $i \in N$ の選好関係とする。

［ゲームGの均衡点（e. p）の定義］

fをCSCFとし、$R^N \in D^N$ とする。$Q^N \in D^N$ は、もし、それぞれの $i \in N$ に対して

$F(Q^N)R^iF(Q^{N-\{i\}},T^i)$,（すべての$T^i\in D^i$に対して）が成立する時、ゲームG（$D^1$, $D^2\cdots D^n$；F；R^N）の均衡点（e．p）という。（このR^iは$R^i\subset R$である）

この均衡点（e．p）の定義を使えば、もし、$R^N\in D^N$に対してR^NがGの均衡点ならばCSCF関数fは、操作不可能性をもつということになるわけである。IIのギバード＝サタースウェイト定理によれば、$|A|\geqq 3$の時、このfは独裁性を持つことになる。均衡点（e．p）と、strongな均衡点（e．p）とのちがいは、次のstrong e. pの定義より明らかとなる。

[strongな均衡点（e．p）の定義]
fをCSCFとし、$R^N\in D^N$とする。この時、$Q^N\in D^N$は、もし、あらゆる提携Cと、あらゆる$T^C\in D^C$とに対して
$F(Q^N)R^iF(Q^{N-C},T^C)$となる1人の個人$i\in C$が存在するならば、ゲームG(D^1, D^2, …D^n；F；R^N）のstrongな均等点（e．p）という。(このR^iは$R^i\subset R$である）

e，pとstrong e. pとから、それぞれexacctly consiten性とstrongly cousitent性との2つの概念が導かれる。

[exactly consistentの定義]
fをCSCFとする。fは、もし、
①それぞれの$R^N\in D^N$に対して、Q^NはゲームGに対するe，pであること
②$F(Q^N)=F(R^N)$となること
という2つの条件を満足するような$Q^N\in D^N$が存在するようならばexactly consistent性を持つという。

[strongly consistentの定義]
CSCF関数fは、もし、
あらゆる$R^N\in D^N$に対し、ゲームGがstrong e. pを持つならば、strongly consistent性を持つという。

こうして、このIIIで問題としているexactly and strongly consitentという概念が、次のように、定義される。

[exactly and strongly consistentの定義]
CSCF関数fは、もし、
①それぞれの$R^N\in D^N$に対し、Q^Nは、ゲームGに対するstrong e. pであること。
②$F(Q^N)=F(R^N)$となること、という2つの条件を満足するような$Q^N\in D^N$が存在するならば、exactly and strongly consistent性を持つという。

まず、このexactly and strongly consistent性の概念を投票ゲーム使う。Q^Nに関する相対多数によって選ぶ選択対象V（Q^N）を次の様に定義する。$V(Q^N)=x_t\leftrightarrow[(i<t\rightarrow v_i<v_t)$ and $(i>t\rightarrow v_i\leqq v_t)]$
ただし、$v_i=|\{j\mid j\in N$ and $x_iQ^jx_h$、ただし、$h=1$、$2\cdots m$に対して$\}|$とする。$Q^N\in P^N(A)$で$1\leqq i\leqq m$である。x_1、x_2、…$x_m\in A$とする。

[exactly and strongly consistent性を使う場合のギバード＝サタースウェイト定理]（[14] P. 156のTh. 2. 13より）
もし$n\geqq 3$で、Aが、すくなくとも3個の選択対象からなっているならば、投票ゲーム$v=(P^1$、…P^N; V）はexactly and strongly consistent性を持たない。

このexactly and strongly consistent性の概念から、新しい別の定理を導くためには、W_hの定義をすこし強いものにする必要がある。

[条件（W_h^*）の定義]
fをCSCF関数とする。提携Cは、もし、
[$R^N\in D^N$, x, $y\in A$、で、すべての$i\in C$に対して、xP^iy] $\rightarrow F(R^N)\neq y$ならば、
stronglyに勝利提携であるという。
もし、あらゆるh人からなる提携が、stronglyに勝利提携である時、fは条件（W_h^*）を満たすという。

以上の準備作業から、次の定理が導かれる。

[exactly and strongly consistent 性を持つＣＳＣＦ関数の存在定理]（[14] PP. 159〜160の Th. 4. 3より）

$k(n, m) = \mathrm{Gauss}[n(m-1)/m] + 1$ とする。もし、$n \geqq m-1$ ならば、ＡＮ（無名性）と条件W^{*}_{h}を満足するＣＳＣＦ関数 $f = (D^1 \cdots D^n ; F)$ が存在する。($D^i = P$ とする。)

$$\text{ここで}\begin{cases} k = k(n, m) \cdots n = tm \ (t \geqq 1) \\ \text{か、} n = tm + r \ (t \geqq 0, 0 < r < m) \text{の時} \\ k = k(n, m) \cdots \text{上記以外の時} \end{cases}$$

上の定理でのＡＮ（無名性）とは、次のような性質である。

[ＡＮ（無名性）の定義]

$R^N \in D^N$ とＮのすべての置換えσに対して

$f(R^N) = f(R^{\sigma(1)}, \cdots R^{\sigma(n)})$ が成立する時、

ｆはＡＮ（無名性）を満たすという。

この定理は、Peleg [15] P.107 で再掲され、普通選挙問題での１つの解決、とされている。この問題とは社会的選択関数ｆがＡＮとＭ（単調性）を満たし、かつ、exactly and strongly consistent 性をもつなら、勝利提携のうち、最小の集合の基数（要素の数）ｋの最小値を求めるという問題であり、上記の定理の$k = [n(m-1)/m] + 1$ が、この値になる。（Ｍ（単調性）については [23] P. 59 を参照）

Ⅳ Implementation Theory について

Ⅲの exactly and strongly consitent 性の概念を、より一般化したものが、implementable 性の概念である。

Ⅲの議論と、このⅣの議論との関係について、見通しをよくするためには、次の定義が有意義である。

[implementable 性の定義]（Moulin&Peleg [12] P.142 より）

ｆをＣＳＣＦ関数とする。このｆは、もしゲームＧが strongly consistent 性を持ち、あらゆる $R^n \in D^n$ に対してＦ [strong e. p (G, R^n)] $= f(R^n)$ が成立する時.

ゲームＧ $(D^1, D^2 \cdots D^n ; F ; R^N)$ によって implementable 性を持たされるという。

[partially implementable 性の定義]（[12] P. 142より）

ｆをＣＳＣＦ関数とする。このｆは、もし、ゲームＧが strongly consistent 性を持ち、あらゆる $R^N \in D^N$ に対してＦ [strong e. p (G, R^N)] $\supset f(R^N)$ が成立する時、ゲームＧ $(D^1, D^2, \cdots D^n ; F ; R^N)$ によって partially implementabl 性を持たされるという。

partially implementable 性を使うと、次の定理が導ける。

[拒否権者存在定理]（Sen（gupta）[16] P.19 の Th. 4. 11 より）

ｆをＣＳＣＦ関数とする。すべての $i \in N$ に対して、$D^i = R$ か $D^i = P$ かであるとする。$m \geqq n$ で $m - n = k$ とおく。このｋは非負の整数である。この時がｆが partially implementable であるための必要条件は、ｍという選択対象から選んだ結果のうち、$k + 1$ のそれぞれに対して、１人の拒否権をもつプレーヤーが存在することである。

この定理の系として、次の３つのものが得られる。

[系１]（[16] P. 20 の Corollary 4. 13 より）

ｆを partially implementable なＣＳＣＦ関数とする。また $m \geqq n$ と仮定する。ｎは所与の値。この時ｍが増加する時、$\frac{q}{m}$ は１に収束していく。（ここでｑは、１人の拒否権を持つプレーヤーが存在する、ｆのもとでの成果の数である。）

オ２の系として

[系２]（[16] P. 21 の Corollary 4. 14 より）

もし、ＣＳＣＦの関数ｆが partially implementable な関数ならば、ｆのもとでのｍ個の成果のうち、$m - 2$ 個のそれぞれの選択対象には、１人の拒否権をもつプレーヤーが存在している。

最後の系として

[系３]（[16] P.21 の Corollary 4.16 より）

ｆをＣＳＣＦ関数とする。すべての $i \in N$ に対して $D^i = R$ か $D^i = P$ かであるとする。$m \geqq n$ と

する。この時

①もし、fがpartially implementableでかつ、AN（無名性）を満たすならば、F（A）の中でのm－2個の選択対象のそれぞれに対して、それぞれのi∈Nは、拒否権をもつプレーヤーである。

②もし、fがpartially implementableでかつ、NT（中立性）を満たすならば、F（A）の中でのm－2個の選択対象のそれぞれに対して、ある人のi∈Nは、拒否権をもつプレーヤーである。

この系3での中立性の定義は次のようである。

［中立性の定義］

$R^N, R^{N'} \in D^N$に対し、またAのすべての置換えσに対して、もし、$x R^i y$ iff $\sigma(x) > R^{i'} \sigma(y)$ ならば、$\sigma[f(R^N)] = \sigma[f(R^{N'})]$（ただし、すべてのi∈Nに対し、また、x, y∈Aとする）が成立するならば、fは中立性を満たすという。

このⅣでの［定理］、［系1］、［系2］、［系3］では、拒否権者の存在を認めることにより、partially inplementable性を持たせる、つまり、操作不可能な社会的選択関数の存在が可能となるという内容は、拒否権所有者を、一種の独裁者ととらえると、ギバード＝サタースウェイト定理に近いといえる。

終りに

この小論は、Strategy-proof（不正操作可能性なし）の社会的選択関数の存在問題を、ゲーム論的に展開している、現在の研究のサーベイである。Ishikawa and Nakamura［11］のTh. 6. 1でも、ギバード＝サタースウェイト定理のゲーム論化をおこなっており、①独裁性の必要、②Nakaura Numberによる制約の必要性、を条件としている。前稿［23］のNakamura Theoremの拡張であるため、この小論では省略した。この小論のⅡからⅢ、Ⅳへと一般化することによる新しい結果と、このStrategy-proofな問題自体の統合理論が、これからの研究目標である。

参考文献

[1] Andjiga, N. G and J. Moulen, "Necessary and Sufficient Conditions for l-stability of Games in Constitutional Form," *International Journal of Game Theory*, Vol. 18, . Issue 1, 1989, pp, 91～110.

[2] Arrow, K. J, *Social Choice and Individual Values, 2nd*, (Cowles Foundation, 1963) 邦訳がある。

[3] Blin, J. M and M. A. Satterthwaite, "Individual Decisions and Group Decisions; The fundamental differences, "*Journal of Public Economics*, Vol. 10, no. 2, Oct, 1978, pp. 247～267.

[4] Breton, M. le, "A Note on Balancedness and Nonemptiness of the Core in Voting games", "*International Journal of Game Theory*", Vol. 18, Issue 1, 1989, pp. 111～117.

[5] Bummett, M and R, Farquharson, "Stability in Voting, "*Econometrica*, Vol. 29, no. 1, Jan, 1961, pp. 33～43.

[6] Dasgupta, P, P. Hammond and E. Maskin, "The Inplementation of Social Choice Rules; Some General Results on Incentive Compatibility, "*Review of Economic Studies*, Vol. 44 (2), no. 143, April, 1979, pp. 185～216.

[7] Dutta, B ard P. K. Pattanaik, "On Nicely Consitent Voting Systems"*Econometrica*, Vol. 29, no. 1 Jan, 1961, pp. 33～43.

[8] Gibbard, A, "Manipulation of Social choice Functions", *Econometrica*, Vol. 41, no. 4, July, 1973, pp. 587～601.

[9] Holzman, R, "On Strong Representations of Games by Social Choice Functions, "*Journal of Mathematical Economics*, Vol. 15, no. 1, 1986, pp. 39～57.

[10] ＿＿＿＿, Sub-Core Solutions of the Problem of Strong Implementation, "*International Jounal of Game Theory*, Vol. 16, Issue 4, 1987, pp. 263～289.

[11] Ishikawa, S. and K. Nakamura, "The Strategy-Proof Social Choice Functions, "Journal of

Mathematical Economics, Vol. 6,no. 3, Dec, 1979, pp. 283～295.
[12] Moulin, H. and B. Peleg, "Core of Effectivity Functions and Implementation Theory, "*Journal of Mathematical Economics*, Vol. 10, no. 1, June, 1982, pp. 115～145.
[13] Oren, I, "The Structure of Exactly Strongly Consistent Social Choice Functions, "*Journal of Mathematical Economics*, Vol. 8, no. 3, Oct, 1981, pp. 207～220.
[14] Peleg, B, "Consistent Voting Systems, "*Econometrica*, Vol. 46, no. 1, Jan, 1978, pp. 153～161.
[15] _______, *Game theoretic analysis in committees* (Cambrdge, U. P, 1984)
[16] Sen (gupta), M, "Implementable Social Choice Rules, "*Journal of Mathematical Economics*, Vol. 11, no. 1, Jan, 1983, pp. 1～24.
[17] Von Neumann, J and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavivor*, (Pricenton, 1944) 邦訳がある。
[18] Wilson, R. "The Game-Theoetic Structure of Arrow's general poissiblity Theorem, "*Journal of Economic Theory*, Vol. 5, no. 1, August, 1972, pp. 14～20.
[19] 鈴村興太郎「経済計画理論」(筑摩書房、1972年) 第3章、第4章、第5章
[20] 大谷　和「アローの一般可能性定理とギバード＝サタースウェイト定理－不正操作可能性について(1)－」奈良県立短期大学研究季報、Vol. 37, no. 2, 1989年10月、pp. 23～43.
[21] 同「社会的選択関数と戦略的行動の回避－不正操作可能性について(2)－」前掲研究季報、Vol. 37, no, 3, 1990年1月、PP. 49～55.
[22] 同「フィルター概念とアローの一般可能性定理」奈良県立商科大学研究季報、Vol. 1, 開学記念号、1990年12月、PP. 119～124.
[23] 同「ゲーム理論とアローの一般不可能定理」奈良県立商科大学研究季報、Vol. 2, no. 2, 1991年10月、PP. 55～61.