奈良県立商科大学「研究季報」開学記念号（1990年12月）

「線形代数」の講義の組立てについて

高　見　昭　夫

はじめに

学生諸君の多くが、卒業の要件を満すためにのみ一般教育科目「数学」を履修するのであるとしても、担当者にとっては、そこで扱った事項が諸氏の数学知識となって、後日、他の科目の道具として役立つならば、本望であると言えるが、こんにち、文科系、理科系を問わず、線形代数と微積分が「数学」学習の主項目であるのは、いくつかの科目でそれらが時に役立つからであろうか。

ところで、線形代数を行う「数学」の講義が週一回の通年であるとするとき、内容として取り上げられる事項は、担当者ごとに違う一端はあるものの、事項の総体は似たところに落着くと言える。しかし、それらの事項をどのように按配すれば、(目標として）一貫した流れのもと、全体が一つのものであるかのように統一しえて、受講者の呑み込み易いものにしえるかという、担当者に委ねられている講義の組立ては、各人各様の取り組が可能な課題と言える。

そこで本稿では、社会科学系学部での講義を前提として、それを考えたい。まず初めに、主たる事項をどれと決め、それら主事項をどうたどれば自然に流れてゆくかを概観し、続いて、それを基本に実際の組立て例を提出したい。

Ⅰ　主事項と流れの概観

柱となる主事項は、行列、連立一次方程式，行列式、ベクトル（ベクトル空間)、線形写像とするのが一般的であろうが、主事項から主事項へ、全体が一つに流れているように組立てを行いたいという我々の目標からすれば、行列式をどう扱うかが一つの焦点になる。というのは、他の４つの主事項は一つの流れに貫通させえるのに対して、行列式へはいっている間はその流れがいったん中断されることになるからである。もちろん、行列式は基礎事項であり、他の主事項中のいくつかの箇所でその知識が必要になるとして、通常、主事項の一つに置かれているのであるが、もし、行列式を使わずにそれらの箇所を通過できるなら、全体の流れを寸断させないため、行列式を外して組立てを行うことも一つの在り方ではなかろうか。実際、それは可能であるので、以下、その立場から概観したい。また、流れを重視するというこの原則から、たとえば、小さな事柄で、その時の流れの埒外（らちがい）のものが、理論を進めるため必要となった場合は、（小さな中断とはなるが）そのつどそこで最少限に準備をすることとして、(全体の流れを中断させないため）必要の生ずる以前に、その事柄の属する領域で予め準備をしておくことはしないものとする。

さてそれでは、どの主事項からはいってゆくかを考えれば、行列、連立一次方程式，ベクトルのいずれからも可能であるが、既になじみのある連立一次方程式がはいり易く、その理論は、ベクトル空間の次元の確定などに必要となるので、連立一次方程式についてすべてを解明しておかなければならない。そこで、連立一次方程式をまず据え、続いて、それを考察する過程で、その解明に

有効に働く概念として行列を導入したい。行列の理論は線形代数の根幹をなす事項であるから、最初に行列からはいってゆくことが多いのであるが、ここでは今の手順で行列へはいり、行列の内容の伸展ごとにその成果を連立一次方程式へ利用をするかたちで、連立一次方程式と行列とを並列的に進めることにして、第1章は「連立一次方程式と行列」と題したい。

この進め方から、続く主事項は自ずとベクトルに決まるが、行列の、特別な型のものとして数ベクトルを定義すれば、数ベクトルの演算は行列の演算をそのまま踏襲でき、ひとまとまりの構造を持つものとして数ベクトル空間が得られる。大抵の場合，このあと、数ベクトル空間をくわしく調べる道は取らず、一挙に、一般のベクトル空間（線形空間）を定義し、線形空間においてどんな事柄がなりたつかを調べる道を取る。というのは、それによって、数ベクトル空間などの具体的な個々の空間ごとを相手にせずとも、それらの空間においてどんな事柄がなりたつかを一括して知りえ、それらの空間に共通する骨組を浮き出させえるからである。しかしこの利点も、初めて線形空間に接する学生にはこの抽象化の意味が呑み込みにくく、つまづきの要因となるので、線形空間をすぐに定義する遣り方を避け、そこにおいて調べるはずの事柄を数ベクトル空間で調べることにする。したがってこの場合、線形写像は、数ベクトル空間の間でのものを考えるわけであるが、線形写像の定義を早くに出してそれを使いながら拓いてゆく方法は取らず、ひとまずは、線形写像がなくとも導ける事柄を考察する。そして、これを終えてから線形写像を導入し、線形写像を使って言えばそれらの事柄がどう記述できるかを再考し、その後、固有値・固有ベクトルのように、線形写像が与えられて始めて対象としえる事柄へ移る。

ところで、上に述べたごとく、これらはすべて数ベクトル空間で見るのであるが、それを済ませたあとでは、やはり、線形空間を与える必要があり、数ベクトル空間におけると同様の事柄が線形空間でなりたつ旨を述べておかねばならない。なお、幾何ベクトルについては、数ベクトルにも線形空間にも先立って一等最初にベクトルの例としてそれを挙げるのが普通であるが、ここでは、上の順序で線形空間へ進んだ後、幾何ベクトル空間も線形空間の一例であるという立場から、それが3項数ベクトル空間と同型になるのを示すことにする。

以上より、線形写像を出す前までを第2章として、題目には「数ベクトル空間」を選び、それ以後を第3章に割り振って「線形写像」を標題としたい。

II　実際の組立て

〔第1章　連立一次方程式と行列〕。　まず、「§1　連立一次方程式」の題目のもとに、n個の未知数を含む、m個の一次方程式からなる連立一次方程式を据える。そして、連立一次方程式の“解”とは、2つの連立一次方程式が“同値”であるとは、等を定義してから、連立一次方程式をそれと同値な別の連立一次方程式に移す変形の仕方として4通りの“基本操作”を考える。すると、基本操作を繰り返せば、解を持つか持たないかの判定を含めて、解の状態のひと目でわかるかたちの連立一次方程式に必ず直しえるが、この§1でそれを行っても、ただ基本操作を繰り返してそんな連立一次方程式を導いたというにとどまり理論に整っていないので、§2から§5までに準備を積んで、基本操作の数学骨格を明確にしてから§6でそんな連立一次方程式を導く。それでは、どの方向に準備をすればよいかは、係数と定数項が基本操作でどう変わるかに注目して“行列”の導入へもってゆき、「§2　行列の定義ならびに演算」へはいる。

§2では最初に行列を定義し、“行”、“列”、“成分”、“型”、“正方行列”、“次数”、“対角成分”、“等しい”、などの用語が何を指すかを見てから、行列についての3つの演算、“加法”、“スカラー倍”、“乗法”の定義を与え、“零行列”、“単位行列”と合流させてそれらの演算を特徴づける等式を導く。特に、乗法についてはその定義の自然であることを推察できる例を挙げておく。続いて、ここまでに得られた事柄を連立一次方程式の記述に活用することを考え、“係数行列”、“拡大係数行列”それぞれによる場合について、乗法を使う行列の等式で連立一次方程式を書き表す。そして、基本操作を施して得られる連立一次方程式を（拡大係数行列を使う）行列の等式で書き表わせば，もとの連立一次方程

式とどこの所がどう違ってくるかを各々の基本操作に対して見る。

§3は、3つの演算が自由に行いえるひとまとまりとして、同次数の正方行列の全体を思考の対象に据え、特に乗法に着目し、非可換、零因子など、実数間の掛け算と違う性質のあることを念頭において、実数の場合の逆数に見合うものを考えるというかたちで、そのような見合うものを持つ行列と持たない行列とに色分けして“正則行列”を定義する。そして、正則のとき”逆行列”はただ一つであることなど正則行列について一般になりたつ事柄を調べ、ついで、今後重要な役割を演ずる具体的な3つのタイプの正則行列として“基本行列”を挙げる。ついで§2と同様に、ここまでの結実を連立一次方程式へ使うことを考え、行列の等式で表わした連立一次方程式に左から正則行列を掛けて得られる連立一次方程式はもとの連立一次方程式と同値であるのを示し、左から掛ける行列が基本行列の場合に得られる連立一次方程式と、基本操作を施して得られる連立一次方程式との関連を調べる。また、拡大係数行列、未知数の行列、にそれぞれ右、左からあるタイプの基本行列を掛けて得られる連立一次方程式との関連も調べる。そこで、§3の題目は「正則行列そして基本行列」とする。

§4では，§3の考究を踏まえて、与えられた行列に左または右から基本行列を掛けることによってその行列を別の行列に変える変形、すなわち、“左基本変形”、“右基本変形”(一括して“基本変形”)を考える。ついで基本変形の“可逆性”などを見て後、まず、任意の行列が基本変形で“標準形”に直せることをそれの一意的であることまでは要求せずに示す。続いて、その一意性を証明するのであるが、それに先立って、その途中で必要となる結果を行列の“区分け”によって導き、それを用いて証明をする。その結果、行列の“階数”の定義が許され、正方行列が正則であるための条件を階数を用いて与えることができる。そこで、§4の題目には「行列の基本変形そして行列の階数」を選び、この§と次の§5では、行列のみを考察して、その成果の連立一次方程式への利用は考えない。

§5は、「逆行列の計算」と題して、§4で得られた結果とここで新しく得る結果とを用いて、与えられた正方行列が正則か否かの判定と、正則のときの逆行列の計算とを同時的に行う方法を与える。

第1章の最後は、「§6　再び連立一次方程式」とする。§3で調べたことより、連立一次方程式に基本操作を施すことは、拡大係数行列に(場合によっては未知数の行列にも)基本行列をしかるべく掛けることであるとわかったから、それを行ってゆけば、解のすぐに記述できるかたちへ達しうるかを問題とし、それの可能であることを示す。そして、そこに到達した連立一次方程式をもとに、どのようなとき解をもち、どのようなとき解をもたないかの判定基準を定め、解をもつときは、その解すべてにわたって当の解を記述したことになる解の式を与える。続いて、そこまでの達成にもとづいて附言できることにふれておく。すなわち、連立一次方程式は、一組も解をもたない場合、一組だけ解をもつ場合、無限に多くの解をもつ場合、の3つの場合だけが起り、二組以上有限組の解をもつ場合は起りえないことを、また、係数・定数項を実数とする連立一次方程式は、実数内では解をもたないが複素数内では解をもつ事態は起らないことをすなわち解の範囲を複素数に拡げて解をもつなら実数の範囲でも解をもつことを、述べておく。そして最後に、“同次連立一次方程式”を取り上げ、解を“自明な解”と“自明でない解”とに分けて、同次連立一次方程式が自明でない解をもつ場合について第2章でしばしば使われる結果を導く。

〔第2章　数ベクトル空間〕。「章」は一応3つに分けているものの、内容の配列は一つに流れるよう努めているので、「§」には通しで番号を振ることにして、§7では、まず、行列の、特別な型のものとして“数ベクトル”を、すなわち、列数1の行列を“列ベクトル”、行数1の行列を“行ベクトル”、と定義する。そして、数ベクトルの演算は行列としての演算をそのまま踏襲し、行列と数ベクトルとの乗法も行列としてそれが可能であればそのまま行われることを述べる。続いて、“一次結合(線形結合)”、“一次従属(線形従属)”、“一次独立(線形独立)”などの概念を説明してから、k個のn項数ベクトルが一次独立(ならびに一次従属)であるための条件を与

え、また、n個のn項数ベクトルが一次独立になる例として“単位ベクトル”の組を与えておく。さらに、一次従属・一次独立に関してこれからしばしば使われる結果を導くが、それらのおよそ半数は、数ベクトルでのみならず線形空間で一般になりたつものであるから、それらの分については、証明の与え方も数ベクトルに密着せず、線形空間での証明に近いかたちとなり、後に、線形空間でなりたつ結果としてそれらを挙げることができる。そして、そこまでたどった経過のまとめとして、任意の行列において、その行列の列ベクトルの“一次独立な最大個数”と、その行列の行ベクトルの一次独立な最大個数とは、ともにその行列の階数に等しい、という結果を導く。そこで、§7の題目は「数ベクトル」とする。

§8は、n項列ベクトル全部の集合あるいはn項行ベクトル全部の集合が加法とスカラー倍について“閉じている”ことと、両演算が8つの等式で特徴づけられていることとから、“n項列ベクトル空間”、“n項行ベクトル空間”（一括して“n項数ベクトル空間”）を定義する。そして、n項数ベクトル空間においては、（n＋1）個以上の元の組はどれも一次従属であり、n個の元からなる一次独立な任意の組を取れば、すべての元はその組の一次結合で“一意的に表わされる”、しかし、（n—1）個以下の元からなる一次独立などんな組を取ってもその組の一次結合で表わされない元が存在する、ことを示して、数ベクトル空間の“次元”と“基底”を定義する。続いて、数ベクトル空間の部分集合を対象に据えて“部分空間”を定義し、次元と基底が部分空間に対しても定められるのを示す。そして、数ベクトル空間の次元・基底は、部分空間の次元・基底の定義において、部分空間として数ベクトル空間自身を取った場合と一致するのを見て後、部分空間においてなりたついくつかの基本結果を導く。さらに、それと並行させつつ、“生成される”部分空間や“和空間”を与え、和空間が“直和”となるための条件を求める、そこで、§8の題目は「数ベクトル空間そして部分空間」とする。

§9は「三たび連立一次方程式」とする。§6で、連立一次方程式を解くことの問題はすべて終っているが、§7、§8の知識をもとに、（連立一次方程式の解を、列ベクトルで表示したものを“解ベクトル”とよぶことにして）与えられた連立一次方程式の解ベクトル全部の集合がどんな有様かを調べるため、もう一度連立一次方程式を取り上げる。まず、同次連立一次方程式を据え、それの解ベクトル全部の集合が部分空間をなすことを示し、その部分空間（“解空間”）の次元を計算する。続いて、同次とは限らない連立一次方程式へ移り、その連立一次方程式に“付随する同次連立一次方程式”を定め、与えられた連立一次方程式の解ベクトル全部の集合が、それに付随する同次連立一次方程式の解空間を用いてどう記述できるかを見る。

§10は、数ベクトル空間の任意な2元の相対関係を記述する一つの尺度（“内積”）を軸に数ベクトル空間を考察することを述べ、特に、この§は実数のもとでのみなりたつと限っておく旨を述べる。そして、§1の初めから§9の終りまでの事柄は、実数と書いているところをすべて複素数と変えたもとで、すべてそのままなりたつが、この§については、複素数のもとで同様の考察を行い、実数の場合のこの§を包含するかたちの結果を出しうるものの、それにはこの§の実数を複素数と変えるだけではだめであることに注意を促す。続いて、内積の基本性質から“シュヴァルツの不等式”と“三角不等式”を導き、2つの数ベクトルの“なす角”を用いて“直交する”を定め、“直交系”を与える。そして、“シュミットの直交化法”で“正規直交系”が構成できるのを示し、部分空間が“正規直交基底”をもつことを述べ、最後に、“直交補空間”について調べる。そこで、§10の題目は「数ベクトル空間での計量（内積）」とする。

〔第3章　線形写像〕。　§11は、“写像”について“定義域”、“終域”、“像”、“値域”、“逆像”、“上への写像（全射）”、“一対一写像（単射）”、“上への一対一写像（全単射、一対一対応）”、“逆写像”、“等しい”、“合成写像”、“恒等写像”、“変換”などの用語の意味するものを説明して後、数ベクトル空間から数ベクトル空間への“線形写像（一次写像）”を定義し、線形写像のもとでなりたついくつかの基本結果を示す。続いて、定義域の元の線形写像による像が、その線形写像の“定める行列”とその元

の積として表わされることを導く。さらに、その逆に、そのかたちで定義される写像が線形写像であることを示し、定義域、終域それぞれの数ベクトル空間を固定したもとでの線形写像全部の集合と、ある型の行列全部の集合とは一対一に対応づけられるのを示す。したがって、特別な場合として、一つの数ベクトル空間を固定するとき、その“線形変換（一次変換）”全部の集合と、ある次数の正方行列全部の集合とが一対一に対応づけられることも述べる。そこで、§11の題目は「写像そして線形写像」とする。

§12は、「今までの結果と線形写像」と題し、§1から§10までに学修した事柄のうち、線形写像の言葉で述べ直しえるものをいくつか見てから、新しい結果も学ぶ。まず、線形変換と結びつけて述べえるものから始め、線形変換に対しても“正則”を定義しえるのを示す。続いて、線形写像と結びつけて述べえるものに移り、定義域である数ベクトル空間の、線形写像による像の次元は、その線形写像の定める行列の階数に等しいことを導き、線形写像にも“階数”を与える。さらに、線形変換と内積を複合させて、与えられた線形変換が、“内積を変えない”ことと、“元の長さを変えない”ことと、その線形変換の定める行列が“直交行列”であることと、は同値であるのを示し、“直交変換”を定義する。

§13は、まず、今までに取り扱って来た、実数を成分とする数ベクトルの数ベクトル空間（(実)数ベクトル空間）に加えて、複素数を成分とする数ベクトルの数ベクトル空間（(複素）数ベクトル空間）をも同時に視界に入れ、線形写像、線形変換についても、（複素）数ベクトル空間の間の線形写像、線形変換をも同時に扱うことに注意を促す。つまり、実数と書いているところを複素数と変えたもとでそのままなりたつというだけで済すのでなく、両者を同時に視界に入れて両者を同時に扱うことを述べる。このあと本題へはいり、写像の“制限（縮小）”、“拡大”、部分空間が線形変換のもとで“不変である”、を説明してから、線形変換の“固有値”と、その固有値に属する“固有ベクトル”を定義し、固有値・固有ベクトルについての基本結果を導く。続いて、実数を成分とする与えられた正方行列の定める、（実）数ベクトル空間の線形変換と、その同じ行列の定める、（複素）数ベクトル空間の線形変換とを据え、両者の固有値の相互関係を調べ、両者の固有値が一致をする行列の例として“対角行列”、“上三角行列”、“下三角行列”、“対称行列”を見る。また、直交行列の定める線形変換の固有値がどうであるかも見る。最後に、固有値に対する“固有空間”を定め、与えられた線形変換の各々の固有値に対する固有空間の和空間を考えて、その和空間が数ベクトル空間自身に達するための条件を求める。そこで、§13の標題は「固有値と固有ベクトル」とする。

§14は、まず、同じ型の行列全部の集合（数ベクトル空間もそのような集合）のような、8つの等式で特徴づけられる加法・スカラー倍の定義された集合のもう一つの例として、定義域と終域の数ベクトル空間をそれぞれ固定したもとでの線形写像全部の集合に、加法、スカラー倍、“零写像”をしかるべく定義したものを考える。そして、これら2者にとどまらず、加法・スカラー倍の定義された集合にはその他さまざまなものがあることを述べ、個々にそれらを調べるかわりに、そのような構造をもつ一般的な数学対象物すなわち“線形空間”を定義し、それを考察すれば、上記のどれにおいてもなりたつ結果が得られて都合がよいことを説明して、線形空間を実際に定義する。そして、線形空間において、一次結合、一次従属・一次独立、部分空間、が数ベクトル空間におけると同様に定められ、§7の結果が、数ベクトルでしか意味を持たないものを除けばそのままなりたつことを述べる。

さらに、基底や次元も、線形空間に対して有限生成の条件を仮定するならば、数ベクトル空間におけると同様に定義でき、§8のすべての結果がほぼ同じようになりたつことも述べる。また、線形空間の間の線形写像が“同型写像”である場合と、線形空間の“同型”と、を定め、同型であるための条件を求める。続いて、内積の導入により“計量線形空間”を定義すれば、計量線形空間において直交系、正規直交系、直交補空間が数ベクトル空間におけると同様に与えられ、§10のすべての結果が計量線形空間においてもなりたつことを述べる。さらに、計量線形空間の間の“計量同型写像”、直交変換、“計量同型”を定め、計量同型であるための条件を求める。そこで、§14の

標題は「線形空間」とする。

§15は、「幾何学に見る線形空間」と題し、線形空間の例を幾何学に求め、その線形空間での、一次従属・一次独立、線形変換，内積、の幾何学的意味を考えるが、それに先立って、幾何学の点・直線・平面に関する次の留意事項を述べる。我々は点、直線、平面それぞれについてイメージを持っており、視覚化が必要なときはそのイメージを紙の上に描出して、点・直線・平面とはそのようなものと考える一方、そう描出されたものは点・直線・平面そのものではないという認識をいだき続けている。そこから、いにしえより、点とはどんなものか、どんなものを点と呼べばよいのか、同じく、直線とは、平面とは、の問が発せられ、人々は、点の、直線の、平面の、それぞれのイメージを言語によって定着させようと努めてきた。しかし、それらの記述が人々の理性を納得させる時はついに訪れなかった。ところが、前世紀の末にある先達が発想の転換を行い、公理と呼ばれる或るまとまったもののみを基礎におけば、紙上に点や直線や平面を描かなくても、ユークリッドと同じ幾何学の体系が建設できることを示した。さらに、別の先達は、どれかのある集合と3次元の実計量線形空間との組がいくつかの条件を満足するときに、その集合の元を点とよび、その集合のしかるべき部分集合を直線や平面とよべば、やはり同じ幾何学が建設できるのを示した。このように、今日、ユークリッド幾何学の基礎は堅固なものになっている。そこで、安心して点・直線・平面を紙上に描いて理解の助けとすることができる、旨を述べておく。

続いて本題へはいり、“有向線分”、“始点”、“終点”、“長さ”、“同じ方向をもつ（方向が同じである）”、“異なる方向をもつ（方向が異なる）”、“同じ向きをもつ（向きが同じである）”、“逆向きである（向きが逆である）”、“異なる向きをもつ（向きが異なる）”、などが何を意味するかを与えた後、有向線分全体の集合に一つの“同値関係”を与える。そして、このときの各々の“同値類”を“幾何ベクトル”とよび、幾何ベクトル全部の集合すなわちその同値関係による“商集合”を考える。すると、各幾何ベクトルを“定める（代表する）”有向線分をもとに幾何ベクトルの間で、有向線分の間におけると同様の用語を定義することができる。

そして、このあとの進め方としては、幾何ベクトルの間に加法とスカラー倍を定義して、幾何ベクトル全部の集合が線形空間となるようにしたい。そこでまず、その集合と3項数ベクトル空間との間に自然なかたちで一対一対応のつくことを示す。したがって、この一対一対応のもとで両者が同型となるようにするのが自然であるから、この一対一対応のもとで、3項数ベクトル空間の加法とスカラー倍に呼応するように両演算を定義し、それが8つの等式を満すことを示す。そこで、この線形空間を“幾何ベクトル空間”と名づける。続いて、k個の幾何ベクトルに対して、それぞれの幾何ベクトルを定める有向線分をしかるべく取れば、それらがどんな関係にあるかを、k個の幾何ベクトルが一次従属であるときと、一次独立であるときとにわけて、$k=1$の場合から順に$k=2$、$k=3$と見る。また、k個の幾何ベクトルの一次結合に対しても同様のことを調べる。続いて、幾何ベクトル空間の線形変換を見てから、幾何ベクトル空間に内積を定義するが、先の一対一対応のもとで計量同型となるようにするのが自然であるから、3項数ベクトル空間の内積に呼応するようにそれを定義し、実際に内積の条件を満しているのを示す。そして締めくくりに、直交補空間と、直交変換の例と、を見る。