奈良県立商科大学「研究季報」開学記念号（1990年12月）

「フィルター概念とアローの一般可能性定理」

大谷　　和

はじめに

この小論は、位相空間論での収束で使われるフィルター概念が、一見、無関係にみえるアローの一般（不）可能性定理にどう適用されるか、次に、アローの条件のどの部分を議論の対象にしているか、第三に、アローの一般（不）可能性定理の証明で、一般に使われる決定集合による証明法と、フィルター概念による証明法との対応関係とを示すこと、最後に、フィルター概念を使うことから得られる新しい結果を述べることを目的としている。以上の目的を果たすために、ゲーム理論での単純ゲームによって投票ゲーム（社会的厚生関数にあたる）を定式化し、単純ゲームにつけ加える諸性質が、フィルター概念の定義に対応している関係があることを利用して、社会的厚生関数へフィルター概念の適用を行なう。ここでは、アローの一般（不）可能性定理の諸条件を述べる。さらに、フィルター概念が関連している、いろいろな社会的合理性について定義しておく。

アローの一般（不）可能性定理の諸条件とは、以下の（A－1）～（A－5）からなる。

（A－1）｜X｜≧3とする。｜X｜はXという選択対象集合の数を意味する。

（A－2）社会的厚生関数σはF上でPへの関数である。
FはN（個人の集合）からP（X上のすべての弱順序の集合）への関数の定義域（個人の選好の特色）については限定が加わっていない。「定義域の非限定性」という。

（A－3）すべてのa，b∈X，f∈Fに対してaf（N）bならばaσ(f)bという「全員一致性」を示す。「パレート原理」ともいわれる。
∈は集合記号で「～の集合内に存在することを意味する。Ⅰのフィルターのところでより詳しく説明する。

（A－4）すべてのa，b∈X，f，g∈Fに対して（a，b）上でf＝gならば（a，b）上でσ（f）＝σ（g)。
a，b以外の選択対象以外の対象に、社会的選択結果は影響されないという意味で、「無関係な選択対象からの独立性」といわれる。

（A－5）すべてのa，b∈X，f∈Fに対して、af（V_0）bならばaσ（f）bとなるようなv_0∈Nは存在しないという意味で、「非独裁性」といわれる。

アローの一般（不）可能性定理といわれるのは、この（A－1）から（A－5）のすべてが満たされるような、一般的な社会的厚生関数は存在しな

いということである。上の諸条件には、明記されていないが、（A―２）の社会的厚生関数の諸性質として、社会的選好の合理性は完全性、非対称性、推移性を満たしていることを前提としている。これらの性質のうち、推移性を、準推移性、非循環性、Semi-order 性に変えていくと、（A―５）の独裁条件がどう変わるかが、以下Ⅰ、Ⅱでの問題となる。

ここで、選好のいろいろな性質の定義をしておく。

完全性：
$\forall x, y \in X : x \neq y$ ならば $_xR_y$ か $_yR_x$ が成立する。

非対称性：
$\forall x, y \in X : {}_xR_y$ ならば $_yR_x$ が成立しない。

推移性：
$\forall x, y, z \in X : {}_xR_y$ で $_yR_z$ ならば $_xR_z$ が成立する。

準推移性：
$\forall x, y, z \in X : {}_xP_y$ で $_yP_z$ ならば $_xP_z$ が成立する。

非循環性：
$\forall x^1, x^2, \cdots x^t \in X : {}_{x^1}P_{x^2}P_{x^{t-1}}P_{x^t}$ ならば $_{x^t}P_{x^t}$ が成立しない。

Semi-order 性：
Interval-order 性（$\forall x, y, z, w \in X$: $_xP_y$, $_yI_z$, $_zP_w$ ならば、$_xP_w$ が成立する。）と
Semi- 推移性（$\forall x, y, z, w \in X$: $_xP_y$, $_yP_{z}$, $_zI_w$ ならば、$_xP_w$ が成立する。）と
の共通集合となる性質をもつのである。

但し、Rは二つの選択対象の選好について、一方をより選好する状態か、無差別な状態にあることを示す。Ｉは二つの選択対象の選好について、無差別状態にあることを示す。Ｐは二つの選択対象について、無差別状態にはなくどちらかをより選好する状態（→厳密に選好するともいう）を示す。

Ⅰ　フィルター概念とその適用について

フィルター概念は、次のように定義される。

（１）$N \in \Omega$、$\phi \notin \Omega$
（２）（$G \in \Omega$ & $G \subset J$）ならば、$J \in \Omega$
（３）（G_1, G_2, $\cdots G_k \in \Omega$、但し k は有限値とする）ならば、$\bigcap_{j=1}^{k} G_j \neq \phi$
（４）（G, $J \in \Omega$）ならば $G \cap J \in \Omega$
（５）（$G \notin \Omega$）ならば $N - G \in \Omega$

ただしNは｛1, 2, 3 … n｝からなる個人の集合、Ωは、個人がつくっている決定集合、G, J, G_i（$i = 1, 2, \cdots n$）は、Ωの部分集合とする。∈は、ある集合内に存在するという意味する（たとえば、N∈Ωは、Ωという集合内にNという集合が存在するとなる)。∉は、逆に存在しないという意味、⊂は包含している状態を意味する。(たとえば、G⊂JはJはGを包含しているとなる)。∩は共通集合を意味する（たとえば、$\bigcap_{j=1}^{k} G_j \neq \phi$ は、詳しく書くと $G_1 \cap G_{2} \cap \cdots \cap G_k \neq \phi$ となり、G_1, G_2, $\cdots G_k$ の共通集合は、空集合ではないということになる)。―は集合の差の意味する（たとえばN―Gは、集合Nと集合Gとの差、すなわち、Xという集合要素を考えると、X∈NかつX∉GというX全体の集合になる)。

上記のΩがプレフィルター（prefilter）であるための必要十分条件は、Ωが (1) (2) (3) という条件を満たすことである。

上記のΩがフィルター（filter）であるための必要十分条件は、Ωが (1) (2) (3) (4) という条件を満たすことである。

上記のΩが極大フィルター（ultrafilter）であるための必要十分条件は、Ωが (1) (2) (3) (4) (5) という条件を満たすことである。

フィルター概念をアローの一般（不）可能性定理に適用するためには、社会的厚生関数をゲーム理論によって表現し直す作業が必要となる。次に、この作業を行なう。

投要ゲームに参加するプレイヤー {1,2,… n} の集合をNとし、各プレイヤーの持つウエイトを$w=\{w_1, w_2, \cdots w_n\}$とし、また決定ルールをrとする。このrは、次のような決定ルールとなる。

$$\sum_{i\in W} w_i > r \sum_{i\in N} w_i$$

とう投票ゲートによる決定方式（一種の社会的厚生関数）を考える。ただし、Wは、ここでは勝利提携とする。たとえば、r＝1／2の時には単純多数決投票方式、r＝2／3の時には、3分の2多数決投票方式を意味する。

この勝利提携Wの性質として、次のような5つを考える。

(i) $N\in W,\ \phi\notin W$

(ii) $(G\in W \,\&\, G\subset J)$ ならば $J\in W$（単純ゲームでの単調性を意味する）

(iii) $(G_1, G_2 \cdots G_k\in W$, ただし$k$は有限値とする）ならば、$\bigcap_{j=1}^{k} G_j\neq\phi$（単純ゲームでのweak性を意味する）

(iv) $(G, J\in W)$ ならば $G\cap J\in W$

(v) $(G\notin W)$ ならば $N-G\in W$（単純ゲームでのstrong性を意味する）

(1)～(5)と(i)～(v)とを比べるとわかるが、フィルター概念の条件と決定集合Ωと、単純ゲームの性質と勝利提携Wとの関係は、完全に対応している。こうして、決定集合Ωを勝利提携Wと呼び換えてもいいわけである。Ωが極大フィルターを満たすならば、(i)～(v)を満たすわけだから極大フィルターをもつWは、(v)により、この投票ゲームには独裁者を持つことになる。次にΩがフィルターを満たすならば、(i)～(iv)を満たすわけだから、フィルターを持つWは、(iv)により、GとJとの共通集合が寡頭制度になる投票ゲームである。最後に、Ωがプレフィルターを満たすならば、(i)～(iii)を満たすわけだから、(iii)により拒否権を持つ個人が何人か存在する（特に、(iii)の最小値が、Nakamura Number になり）拒否権者支配制度を持つ投票ゲームになる。

II　決定集合による証明とフィルター概念による証明との対応関係について

社会的合理性を、アローの一般（不）可能性定理での、推移性（もちろん、完全性・非対称性を含んでのことだが）から、準推移性・非循環性への弱い条件に変化させると、決定集合による証明によって、アローの独裁制定理から、寡頭制定理、拒否権者支配制定理へと変化していく。すなわち、鈴村〔26〕を利用して列挙していくと、

アローの独裁制定理（アローの一般（不）可能性定理と、普通呼ばれている。Arrow〔2〕による）

> |X|≧3とする。社会的厚生関数σが、定義域の非限定性、推移性、無関係な選択対象からの独立性、パレート原理を満足するならば、σは独裁制ルールを必要とする。

寡頭制定理（Sen〔21〕Mas - Colell and Sonnenschein〔16〕による）

> |X|≧3とする。社会的厚生関数σが、定義域の非限定性、準推移性、無関係な選択対象からの独立性、パレート原理を満足するならば、σは寡頭制ルールを必要とする。

拒否権者支配制定理（Mas - Colell and Sonnenschein〔16〕による）

> |X|≧3とする。社会的厚生関数σが、定義域の非限定性、非循環性、無関係な選択対象からの独立性、パレート原理、正の感応性を満足するならば、σは拒否権者支配制ルールを必要とする。

但し、ここでの「正の感応性」とは、いま、ある個人が、もともとxとyを無差別と考えていたのがxをyよりも厳密に選好するようになるか、いずれかの意味において選好の変化を経験したものとした場合、もともとの選好集合に対応する(x, y)から社会的選択したものの中に、xを含

んでいたならば、変化後の選好集合に対応する（x, y）からの社会的選択したもののは、xのみを含むことになる。（鈴村〔26〕p.106の注20による）

さらに、社会的合理性をSemi-order 性としてみると、アローの独裁制定理と同じように独裁制ルールを必要となることが証明されている。

Semi-order 性の場合の独裁制定理（Blair and Pollak〔5〕による）

> ｜X｜≧4とする。社会的厚生関数σが、定義域の非限定性、Semi-order 性、無関係な選択対象からの独立性、パレート原理を満足するならば、σは独裁制ルールを必要とする。

以上の4つの定理の結論と、Ⅰの最後で述べたフィルター概念によって社会的厚生関数を単純ゲームと解釈することからの結論との、対応関係に注目すれば，Sen〔22〕のp.1090の、次のような表現になる。

(a) 推移性は極大フィルターにあたる。
(b) Semi-order 性は極大フィルターにあたる。
(c) 準推移性はフィルターにあたる。
(d) 非循環性はプレフィルターにあたる。

また、アローの条件に、不正操作可能性条件をさらに加えて議論するギバート＝サタスウェイト定理（Gibbard〔13〕，Satterthwaite〔19〕による）についても、社会的厚生関数を、不正操作可能性を持つ社会的厚生関数と一般化して考えれば、全く同じように、単純ゲームによって解釈し直され、そして、フィルター概念によっても表現される。こうして、不正操作可能性まで考えに入れた独裁制定理（これがギバート＝サタスウェイト定理そのものになる）、寡頭制定理、拒否権者支配制定理（この定理はIshikawa and Nakamura〔14〕によってなされた）が同様に導かれることになる。

Ⅲ　新しい結果と、この小論の結論

この小論は、まずゲーム理論と社会的厚生関数との関係を探る時には、この関係を媒介する概念として、位相数学で使われるフィルター概念を登場させること必要となることを示している。そして、こうして登場したフィルター概念を利用すると、アローの定理への従来の結果とどう対応するか、また、得られた新しい結果から、従来の結果と異なる展開が可能かを述べようとしている。従来の結果との対応関係については、Ⅱで述べたように、非循環性はプレフィルターに対応し、拒否権者支配制ルールにいきつき、準推移性はフィルターに対応し寡頭制ルールにいきつき、最後に、推移性、Semiorder 性は、極大フィルターに対応し、独裁制ルールにいきつくという結論になる。

以上で述べていないフィルター概念による新しい結果としては、まず、Brown〔10〕で展開されたようなフィルター概念と同様な収束概念を展開するlattice 理論を利用して、個人の数が無限大になった時、測度論を利用して、プレフィルターには独裁者ではないが、完全には共通集合として削減できない要素が存在することを主張する議論がある。こうした要素の存在の条件を示すことにより、社会的厚生関数が一般的に存在し得ることを示し、個人の数が有限値としても近似的にアローの一般（不）可能性定理が解決しえることを示すわけだが、この要素の存在条件の、政治・社会・経済的意味が、上述したフィルター概念と社会的合理性概念との対応関係のようには明らかではない点に問題がある。今後、研究のまたれる個所である。

次に、フィルター概念の定義の（3）から出てくるIshikawa & Nakamura〔14〕で展開されたNakamura Number も、ゲーム理論と社会的厚生関数との関係を探る研究から展開された新しい結果で、これによって非循環性を持つ社会的合理性の場合に、存在する拒否権者の最小数がわかることになる。また、Ⅱで述べたように、不正操作可能性を持つ社会的厚生関数の議論でも新しい一般化された結果が得られいる。

最後に、このゲーム理論概念やフィルター概念の利用による社会的厚生関数研究、すなわち、アローの一般（不）可能性定理研究は、過度に数学的で、政治・社会・経済学的解釈が困難になる点

があるが、これからの、アローの一般（不）可能性定理研究の、新しい有望な方向であると、論者は考えている。

参考文献

〔1〕 Armstrong, T. E., “Arrow's Theorem with Restricted Coalition Algebras,” *Journal of Mathematical Economics,* Vo1. 7, no. 1, March, 1980, pp.55〜75.

〔2〕 Arrow, K. J., *Social Choice and Individual Value,* 2nd, (Cowles Foundations, 1963)

〔3〕 Batteau, P, J. M. Blin and B. Monjardet, “Stabillity Aggregation Procedure, Ultrafilter and Simple Games, ”*Econometrica,* Vo1. 49, no. 2, March, 1981, pp. 527－534.

〔4〕 Blair, D, H, G. Bordes, J. S. Kelly and K. Suzumura, “Imposibility Theorem without Collective Rationality. ”*Journal of Economic Theory,* Vo1. 13, no. 3, Dec, 1976, pp.361〜379.

〔5〕 ________ and R. A. Pollak, “Collective Rationality and Dictatorship : The Scope of the Arrow Theonom,” *Journal of Economic Theory,* Vo1. 21, no. 1, August, 1979. pp.186〜194.

〔6〕 ________ , “Acyclic Collective Choices Rules,” *Econometica,* Vo1. 50, no. 4, July, 1982, pp.931〜943.

〔7〕 Blau, J. H. and R. Deb, “Social Decision Functions and the Veto,” *Econometrica,* Vol. 45, no. 4, May, 1977, pp.871〜879.

〔8〕 ________ , “Semiorders and Collective Choice, ”*Journal of Economic Theory,* Vo1. 21, no. 1, August, 1979, pp.195〜206.

〔9〕 Boomfield, S. and R. Wilson, “The Postulates of Game Theory,” *Journal of Mathematical Sociology,* Vo1. 2, July, 1972, pp.221〜234.

〔10〕 Brown, D. J., “An Approximate Solution to Arrow's Problem,” *Journal of Economic Theory,* Vo1. 9, no, 4, Dec, 1974, pp.375〜383.

〔11〕 ________, “Aggregation of preference,” *Quaterly Journal of Economics,* Vo1. 89, no. 3, August, 1975, pp.456〜469.

〔12〕 Fishburn, P. C., “Arrow's Impossibility Theorem : Concise proof and Infinite Voters,” *Journal of Economic Theory,* Vo1. 2, no.1, March, 1970, pp.103〜106.

〔13〕 Gibbard, A., “Manipulation of Voting Schemes : A General Result. ”*Econometrica,* Vo1. 41, no. 4, July, 1973, pp.587〜601.

〔14〕 Ishikawa, S. and K. Nakamura, “The Strategyproof Social Choice Functions.” *Journal of Mathematical Economics,* Vo1. 6, no. 3, Dec. 1979. pp.283〜195.

〔15〕 Kirman, A. P. and D. Sonderman, “Arrow's theorem, Many Agents and Invisible Dictators.” *Journal of Economic Theory,* Vo1. 5, no. 2, Oct, 1972, pp.267〜277.

〔16〕 Mas-Colell, A and H. Sonnenschein, “General Possibility Theorem for Group Decision Function” *Review eview of Economic Studies,* Vo1. 39, no. 118, April, 1972, pp.185〜192.

〔17〕 Monjardet, B., “On the Use of Ultrafilters in social choice theory, ”*Social Choice and Welfare* (Pattanaik P. K. and M. Salles (ed), North-Holland, 1983), ch. 5, pp.73〜78.

〔18〕 Pazner, E. A. and E. Wesley, “Stability of Social Choices in Infinitely Large Societies, ”*Journal of Economic Theory,* Vol. 14, no. 2, April, 1977, pp.252〜262.

〔19〕 Satterthwaite, M. A., “Strategy-Proofness and Arrow's Conditions:Existence and Correspondence Theorem for Voting Procedures and Social Welfare Functions,” *Journal of Economic Theory,* Vo1. 10, no. 2, April, 1975, pp.187〜217.

〔20〕 Schmitz, N., “A Further Note on Arrow's Impossibility Theorem,” *Journal of Mathematical Economics,* Vo1. 4, no. 2, August, 1977, pp.189〜196.

〔21〕 Sen. A., *Collective Choice and Social Welfare* (North-Holland, 1970).

〔22〕 ___________, "Social Choice Theory," *Handbook of Mathematical Economics,* Vo 1 . Ⅲ (Arrow, K. J. and M. D. Intriligator (ed), North-Holland, 1986), ch 22, pp. 1073～1181.

〔23〕 Willson, R., "The Game-Theoretic Structure of Arrow's General Possibility Theorem," *Journal of Ecnomic Theory,* Vo 1 . 5, no. 1 , August, 1972, pp.14～20.

〔24〕 ___________ , "On the theory of Aggregation," *Journal of Economic Theory,* Vo 1 . 10, no. 1 , Feb, 1975, pp.89～99.

〔25〕 鈴木光男「ゲーム理論入門」(共立全書239、1981年) pp.215～220.

〔26〕 鈴村興太郎「経済計画理論」(筑摩書房、1982年) 第 3 章

〔27〕 中村健二郎「ゲーム理論と社会選択」(勁草書房、1981年)

〔28〕 大谷和「一般均衡論の社会厚生関数的解釈—アローの指摘の検討」経済学雑誌、Vo 1 . 86, 1985年 7 月、pp.125～132.

〔29〕 同「書評 : Collected Papers of K. J, Arrow, Vo 1 . 1 ～ 2 」奈良県立短期大学研究季報、Vo 1 . 35, no. 1 . 2 . 3 , 1986年12月、pp.283～292.

〔30〕 同「アローの一般可能性定理とその第 1 条件の検討」前掲研究季報、Vo 1 .35, no. 4 , 1988年 3 月、pp.21～34.

〔31〕 同「アローの一般可能性定理と準推移性」前掲研究季報、Vo 1 . 35, no. 4 , 1988年 3 月、pp.35～45.

〔32〕 同「アローの一般可能性定理と独裁制・寡頭支配制・拒否権者支配制」前掲研究季報、Vo 1 . 36, no. 1 , 1988年 8 月、pp.49～62.

〔33〕 同「センのリベラル・パラドックスについて」前掲研究季報、Vo 1 . 36, no. 3 , 1989年 1 月、pp.41～63.

〔34〕 同「公平性とパレート原理」前掲研究季報、Vo 1 . 36, no. 4 , 1989年 3 月、pp.15～24.

〔35〕 同「アローの一般可能性定理とギバート＝サタスウェイト定理—不正操作可能性について(1)—」前掲研究季報、Vo 1 . 37, no. 2 , 1989年10月、pp.23～43.

〔36〕 同「社会的選択関数と戦略的行動の回避—不正操作可能性について(2)—」前掲研究季報、Vol. 37, no. 3 , 1990年 1 月、pp.49～55.